

FUNCIONES INVERSAS

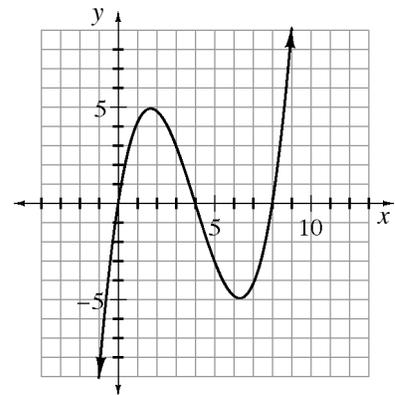
5.1.1 – 5.1.3

En esta sección, los alumnos explorarán las funciones inversas, es decir, funciones que “deshacen” las acciones de otras funciones. Los valores de salida de la función original son los valores de entrada de la función inversa y vice versa. Pueden utilizarse múltiples representaciones para verificar que dos funciones sean inversas entre sí. Pueden usarse gráficos para determinar las restricciones necesarias al dominio de las dos funciones para asegurar que sean inversas entre sí. Una función inversa tiene la notación f^{-1} (se lee como inversa de f). Observa que el -1 no es un exponente negativo, es el símbolo matemático que indica la inversa de la función f . La línea de simetría $y = x$ se usa para graficar la inversa de una función y escribir las ecuaciones de funciones inversas.

Para más información consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 5.1.3.

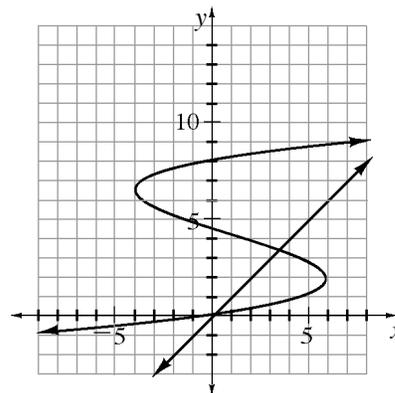
Ejemplo 1

Puedes ver el gráfico de $f(x) = 0.2x^3 - 2.4x^2 + 6.4x$ a la derecha. Grafica la inversa de esta función.



Los gráficos de funciones y sus inversas tienen una propiedad especial: son simétricos respecto de la recta $y = x$.

Si añadimos la recta $y = x$ al gráfico, la inversa de la función dada es su reflejo a lo largo de esta recta. Dobla la hoja por la recta $y = x$, y traza el resultado para crear el reflejo. Puedes ver el resultado a la derecha.



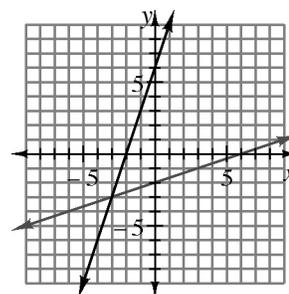
Ejemplo 2

Escribe la ecuación de la inversa de las funciones dadas a continuación. Usa la notación de funciones y menciona cualquier restricción al dominio necesaria para que los pares de funciones sean inversos entre sí. Verifica tus respuestas por medio de un gráfico.

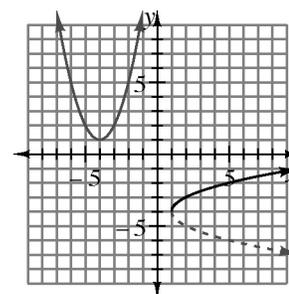
a. $f(x) = \frac{x-6}{3}$

b. $g(x) = (x+4)^2 + 1$

La función del punto (a) resta 6 al valor de entrada y divide el resultado por 3. La función inversa revierte este proceso. Por lo tanto, la función inversa primero multiplica por 3 y luego suma 6. Por lo tanto, la función inversa, llamada f^{-1} , es $f^{-1}(x) = 3x + 6$. No es necesario restringir el dominio, porque el dominio de ambas funciones es todos los números reales. En el gráfico de la derecha, la función original fue graficada en gris oscuro, y la inversa en negro.



La función del punto (b) suma 4 al valor de entrada, eleva ese valor al cuadrado y suma 1. La función inversa primero resta 1, luego calcula la raíz cuadrada y finalmente resta 4. Por lo tanto, $g^{-1}(x) = \sqrt{x-1} - 4$. El dominio de la función inversa es $x \geq 1$ y su rango es $y \geq -4$. Por lo tanto, el dominio de la función original debe ser restringido a $x \geq -4$ y el rango correspondiente es $y \geq 1$. Puedes ver esto en el gráfico de la derecha, donde la función original fue graficada en gris oscuro, y la inversa en negro.



Problemas

Escribe la ecuación de la inversa de cada una de las funciones a continuación. Menciona cualquier restricción al dominio necesaria para que las funciones sean inversas entre sí.

1. $f(x) = -5(x-4)$

2. $h(x) = \frac{5}{8}x - 5$

3. $k(x) = \sqrt[3]{x+2} + 3$

4. $f(x) = x^2 + 6$

5. $f(x) = \frac{3}{x} + 6$

6. $g(x) = \frac{5}{x-8}$

7. $g(x) = (x+1)^2 - 3$

8. $f(x) = (x+2)^3$

9. $m(x) = 3 + \sqrt{x-4}$

10. $g(x) = 3x + 6$

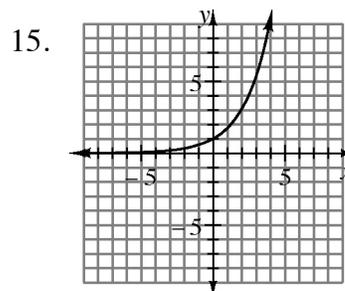
Grafica cada función y su inversa. Restringe los dominios, de ser necesario.

11. $h(x) = \frac{x}{6} + 2$

12. $f(x) = 2x^2 - 1$

13. $g(x) = \sqrt{x} - 4$

14. $n(x) = \frac{1}{x-5}$



Respuestas

1. $f^{-1}(x) = -\frac{x}{5} + 4$

2. $h^{-1}(x) = \frac{8}{5}x + 8$

3. $k^{-1}(x) = (x - 3)^3 - 2$

4. $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 6}$
el dominio de f debe ser $x \geq 0$

5. $f^{-1}(x) = \frac{3}{x-6}$

6. $g^{-1}(x) = \frac{5}{x} + 8$

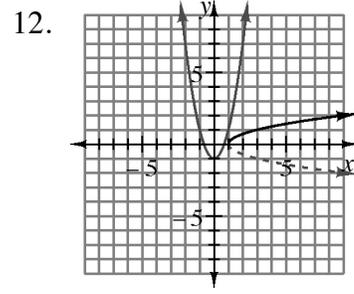
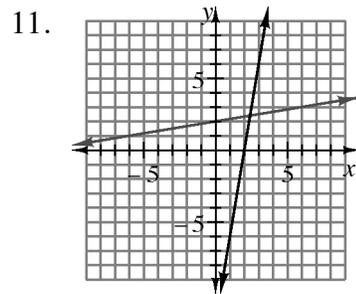
7. $g^{-1}(x) = \sqrt{x + 3} - 1$
el dominio de g debe ser $x \geq -1$

8. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} - 2$

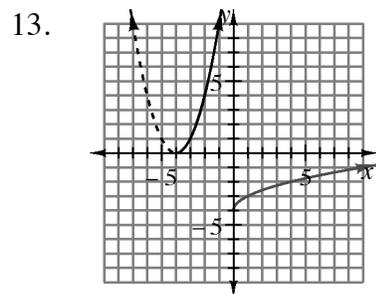
9. $m^{-1}(x) = (x - 3)^2 + 4$, para $x \geq 3$

10. $g^{-1}(x) = \frac{x-6}{3} = \frac{1}{3}x - 2$

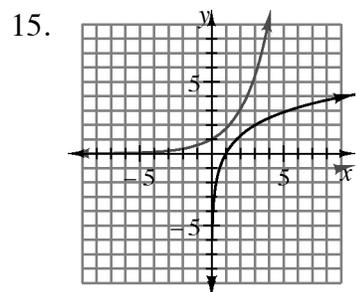
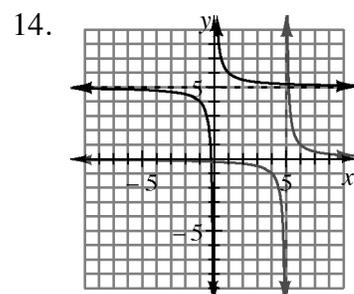
Las funciones originales fueron graficadas en gris oscuro y las inversas en negro.



El dominio de f debe ser restringido a $x \geq 0$.



El dominio de f^{-1} debe ser restringido a $x \geq -5$.



En esta sección, los alumnos explorarán la inversa de una función exponencial. Si bien el gráfico de la inversa de una función exponencial puede crearse reflejando el gráfico a lo largo de la recta $y = x$, los alumnos aún no pueden escribir la ecuación de esta función inversa. Para esto deben conocer una nueva función: el logaritmo.

Para más información, consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 5.2.4.

Ejemplo 1

Determina cada uno de los valores faltantes a continuación y justifica tu respuesta escribiendo la ecuación en su forma exponencial equivalente.

a. $\log_5(25) = ?$

b. $\log_7(?) = 3$

c. $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = ?$

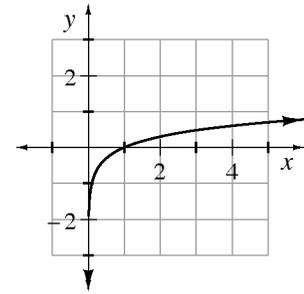
En el punto (a), $\log_5(25)$, pregunta: “¿A qué exponente se necesita para elevar la base 5 para obtener 25?”. Esta pregunta se puede traducir en una ecuación: $5^? = 25$. Al escribirla de este modo, la respuesta se vuelve más obvia: 2. Esto es así porque $5^2 = 25$.

El punto (b) puede reescribirse como $7^3 = ?$. La respuesta es 343.

El punto (c) pregunta: “¿A qué exponente debemos elevar 2 para obtener $\frac{1}{8}$?” o $2^? = \frac{1}{8}$. La respuesta es -3 porque $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

Ejemplo 2

El gráfico de $y = \log(x)$ se muestra a la derecha. Usa este “gráfico madre” para graficar cada una de las ecuaciones a continuación. Describe cómo transformaste el gráfico madre para obtener cada nuevo gráfico. Nota: cuando un logaritmo se escribe sin una base, como en $y = \log(x)$ y se usa la tecla log de una calculadora, su base es 10.



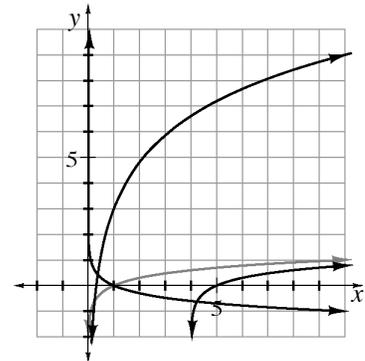
$$y = \log(x - 4) \quad y = 6\log(x) + 3 \quad y = -\log(x)$$

La función logarítmica sigue las mismas reglas que la transformación de gráficos de las demás funciones. Puedes ver el gráfico madre, $y = \log(x)$, en gris a la derecha.

$y = \log(x - 4)$ desplaza el gráfico madre 4 unidades a la derecha.

$y = 6\log(x) + 3$ desplaza el gráfico madre 3 unidades hacia arriba, pero también lo estira verticalmente por un factor de 6.

$y = -\log(x)$ es reflejado verticalmente respecto del eje x .



Problemas

Reescribe cada ecuación logarítmica como una ecuación exponencial y viceversa.

- | | | | |
|--------------------------------------|--|--------------------------|-------------------|
| 1. $2 = \log_4(x)$ | 2. $3 = \log_2(x)$ | 3. $x = \log_5(30)$ | 4. $4^x = 80$ |
| 5. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 64$ | 6. $x^3 = 343$ | 7. $5^x = \frac{1}{125}$ | 8. $\log(32) = x$ |
| 9. $11^3 = x$ | 10. $-4 = \log_x\left(\frac{1}{16}\right)$ | | |

¿Cuál es el valor de x en cada ecuación a continuación? De ser necesario, reescribe la expresión como la ecuación exponencial equivalente para verificar tu respuesta.

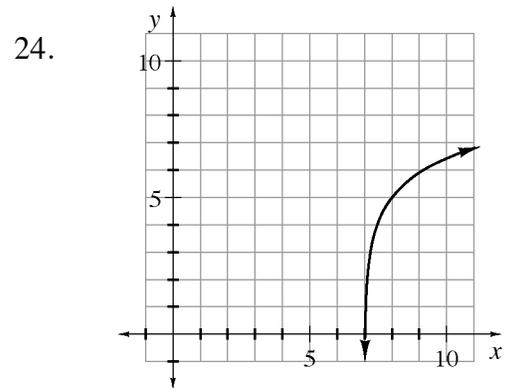
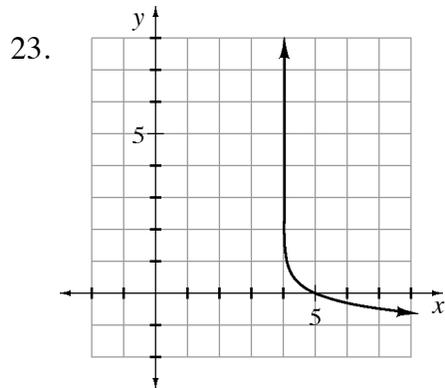
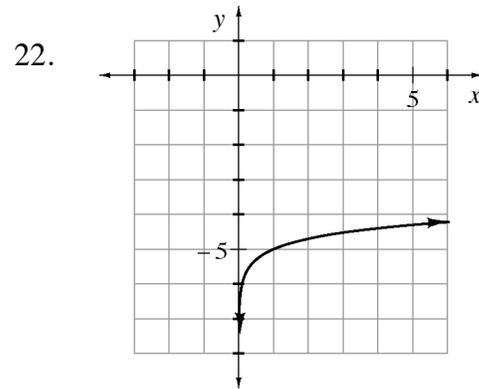
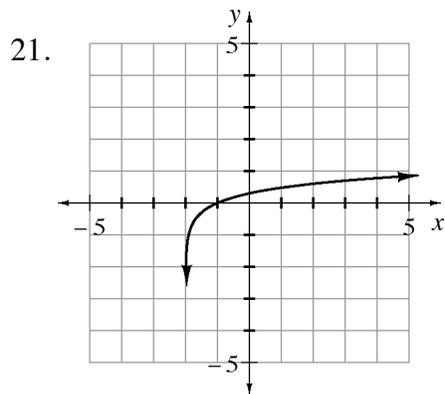
- | | | | |
|--|--|--------------------------|----------------------|
| 11. $4 = \log_5(x)$ | 12. $2 = \log_9(x)$ | 13. $6 = \log(x)$ | 14. $81 = 9^x$ |
| 15. $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 243$ | 16. $6^x = 7776$ | 17. $7^x = \frac{1}{49}$ | 18. $\log_2(32) = x$ |
| 19. $\log_{11}(x) = 3$ | 20. $\log_5\left(\frac{1}{125}\right) = x$ | | |

Grafica cada una de las siguientes ecuaciones:

- | | | | |
|-----------------------|----------------------------|------------------------|-----------------------|
| 21. $y = \log(x + 2)$ | 22. $y = 3\log(x - 7) + 5$ | 23. $y = -\log(x - 4)$ | 24. $y = \log(x) - 5$ |
|-----------------------|----------------------------|------------------------|-----------------------|

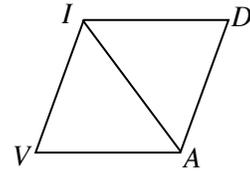
Respuestas

- | | | | |
|-------------------------|-----------------------------|---|---------------------|
| 1. $4^2 = x$ | 2. $2^3 = x$ | 3. $5^x = 30$ | 4. $\log_4(80) = x$ |
| 5. $\log_{1/2}(64) = x$ | 6. $\log_x(343) = 3$ | 7. $\log_5\left(\frac{1}{125}\right) = x$ | 8. $10^x = 32$ |
| 9. $\log_{11}(x) = 3$ | 10. $x^{-4} = \frac{1}{16}$ | 11. $x = 625$ | 12. $x = 81$ |
| 13. $x = 1,000,000$ | 14. $x = 2$ | 15. $x = -5$ | 16. $x = 5$ |
| 17. $x = -2$ | 18. $x = 5$ | 19. $x = 1,331$ | 20. $x = -3$ |



PRÁCTICA PARA LOS EXÁMENES SAT

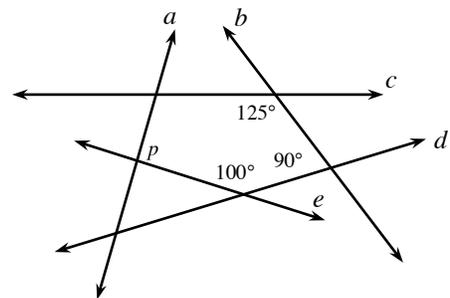
1. En la figura de la derecha, $\triangle DAI$ es isósceles, $DI = 13$ y la base del triángulo es igual a 24. Si $\triangle VAI \cong \triangle DAI$, ¿cuál es el área del cuadrilátero $DAVI$?



- a. 60 b. 75 c. 120 d. 156 e. 240
2. Un avión experimental vuela a una velocidad de 5280 millas por hora. ¿Cuántas millas puede recorrer este avión en 10 segundos?

- a. 1.467 b. 8.802 c. 11.237 d. 14.667 e. 88.022

3. Si el ángulo (no incluido) en el que a y b se intersecan es tres veces mayor que el ángulo (no incluido) en el que e y b se intersecan, ¿cuál es el valor de p ?



- a. 70° b. 85° c. 140°
d. 160° e. No es posible determinarlo

4. Supongamos que $\zeta x \zeta$ es definido, para todos los valores enteros positivos de x , como el producto de todos los factores pares de $4x$. Por ejemplo, $\zeta 3 \zeta = 12 \times 6 \times 4 \times 2 = 576$. ¿Cuál es entonces el valor de $\zeta 5 \zeta$?

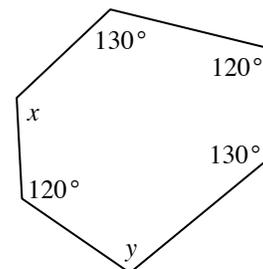
- a. 1600 b. 6400 c. 7200 d. 8000 e. 9600

5. La tabla de la derecha muestra la distribución de los temas cubiertos en un texto sobre negocios, en capítulos y páginas por capítulo. Según la tabla, ¿cuántas páginas tiene en total el texto?

Tema	Nro. de capítulos	Nro. de páginas
Desarrollo	3	12
Marketing	4	8
Relaciones públicas	1	11

- a. 31 b. 39 c. 48 d. 65 e. 79

6. En la figura de la derecha, ¿cuál es la suma de x e y ?
Nota: la figura no está dibujada a escala.



7. Si $2^q = 8^{q-1}$, entonces ¿ $q = ?$
8. Si a es el 40 por ciento de 300, b es el 40 por ciento de a , y c es el 25 por ciento de b , ¿cuál es el valor de $a + b + c$?
9. Si $\frac{x}{4} = \frac{11}{20}$, ¿cuál es el valor de x ?
10. ¿Cuál es el resultado de sumar $\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{3}$ a 5?

Respuestas

1. C
2. D
3. C
4. A
5. E
6. 220°
7. $q = \frac{3}{2}$
8. 180
9. $x = 2.2$
10. $5\frac{1}{5}$